Általános taggal megadott sorozatok összegzési képletei

Kéri Gerzson Ferenc

1. Bevezetés

A sorozatok néhány érdekes esetét tárgyaló előadást az alábbi bontásban építem fel: 1. képletek, 2. alkalmazások, 3. bizonyítás vázlatok.

Téma szerint az előadást a sorozatok négy típusára szeretném koncentrálni, négy olyan típusra, amelyek mindegyike a közismert számtani sorozat tagjaira épül. A dolgok közepébe vágva, rögtön sorolom a négy típust.

1. Hatványösszegek:

$$1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k.$$

Itt és a továbbiakban is k-val tetszőleges rögzített pozitív egész kitevőt jelölünk.

2. Hatványozott számtani sorozatok összegzése:

$$a^k + [a+d]^k + [a+2d]^k + \ldots + [a+(n-1)d]^k.$$

Vegyük észre, hogy $a = d = 1$ esetén ez a típus az 1. típusú hatványösszegre redukálódik, $k = 1$ esetén pedig a sima számtani sorozatra.

3. Koszinusz függvénnyel leképezett számtani sorozatok összegzése:

$$\cos a + \cos[a+d] + \cos[a+2d] + \ldots + \cos[a+(n-1)d].$$

4. Koszinusz függvénnyel leképezett hatványozott számtani sorozatok összegzése:

$$\cos^k a + \cos^k[a+d] + \cos^k[a+2d] + \ldots + \cos^k[a+(n-1)d].$$

A két utóbbi típus szinusz függvénnyel is hasonlóan tárgyalható, azonban a koszinusz függvény választása esetén valamivel egyszerűbb a tárgyalás, azért ezzel az esettel illusztráljuk a számítás módszerét. Ez a két utóbbi típus különösen érdekes abban a speciális esetben, amikor $d = \frac{2\pi}{n}$. Ilyenkor a függvény argumentumokat szögeknek tekintve, ezek irányai egyenletes lépésközökkel pontosan körbejárják a szélrózsát.

Az 1. típus felkeltette az érdeklődésemet már gimnazista koromban, és kiszámítottam az $a_n = n^k$ sorozat első n tagjának zárt összegképletét a $k = 7$ kitevőig. Egy kis füzetet jelöltem ki képletgyűjtemény céljára, melynek első lapján szépen felsoroltam először a $k = 1, 2, 3$ kitevők esetére vonatkozó közismert, majd folytatólagosan az általam kiszámított, ezt megelőzően viszont általam nem ismert $k = 4, 5, 6, 7$ kitevők esetére vonatkozó összegképleteket. Valahogy így:

$$
\begin{aligned}
1 + 2 + 3 + \ldots + n &= \tfrac{n(n+1)}{2} \\
1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 &= \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 &= \tfrac{n^2(n+1)^2}{4} \\
1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 &= \tfrac{n(n+1)(2n+1)[3n(n+1)-1]}{30} \\
1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5 &= \tfrac{n^2(n+1)^2[2n(n+1)-1]}{12} \\
1^6 + 2^6 + 3^6 + \ldots + n^6 &= \tfrac{n(n+1)(2n+1)[3n^2(n+1)^2-3n(n+1)+1]}{42} \\
1^7 + 2^7 + 3^7 + \ldots + n^7 &= \tfrac{n^2(n+1)^2[3n^2(n+1)^2-4n(n+1)+2]}{24}
\end{aligned}
$$

Amikor éppen ezzel voltam elfoglalva, pontosabban: amikor már megvolt a hetedik hatványok összegképlete, Autheried tanárnő a füzetemben ezt megpillantva arra kért, hogy szeretné, ha kitűzném Kömal feladatként. Ezt megelőzően is felvetette már, hogy helyes volna, ha a mások által kitűzött feladatok szorgalmas megoldása mellett magam is tűznék ki feladatokat. Sajnos a kreativitás soha nem volt az erős oldalam, talán ezért ezt a kérését akkor nem teljesítettem. Mentségemre szeretném felhozni, hogy az is motivált a negatív hozzáállásomban, hogy a Budapesten talán havi (de lehet, hogy annál ritkább) rendszerességgel, Reiman István szervezésében és vezetésével tartott Ifjúsági Matematikai Kör összejöveteleinek egyikén szóba hoztam, hogy én tudom a 3-nál nagyobb kitevőjű hatványösszegeket is zárt formulával, Reiman tanár úr azonban leintett, nem hagyta, hogy erről beszéljek, mert bizonyára nem tartotta elég fontosnak vagy érdekesnek.

Évtizedekkel később, kicsit eltérő módon, lényegében teljesítettem Autheried tanárnő régi kérését, amikor ő sajnos már nem élt. Azzal a különbséggel, hogy nem általam már megoldott, hanem még megoldatlan feladatokat tűztem ki az internetes honlapomon. Mindenesetre a tanárnő régi kérése motivált abban, hogy a weblapomon nyilvános pályázatot tűztem ki a magasabb kitevőkre vonatkozó hatványösszegek zárt képleteinek a megadására. Ennek megoldásába többen beszálltak, és ezáltal $k = 35$ kitevőig jutottam el a hatványösszegek zárt képleteinek a felsorolásával a honlapomon.

A Térlefedő (covering) kódok kérdései c. 2011-re elkészült könyvemben pedig egy külön rövid fejezetet szántam megoldatlan problémák felsorolására a könyv témájában.

Az említett iskolás kori füzetemnek további lapjain a többszörös szögek szögfüggvényeire vonatkozó képleteket gyűjtöttem össze, nevezetesen $\sin kx$ és $\cos kx$ kifejezését $\sin x$ és $\cos x$ polinomjaként. Példaként az egyik ilyen képletsort idézem, $\cos kx$ kifejezését $\cos x$ polinomjaként. Ez volt a kis füzetem egyik további lapjának egy részlete. Arra még emlékszem, hogy $\cos 7x$-nél tovább is folytattam, de arra már nem, hogy pontosan meddig. lehet, hogy valahol 10 körül álltam meg, de lehet, hogy csak 15 körül.

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

$$\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$$

$$\cos 6x = 32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x - 1$$

$$\cos 7x = 64\cos^7 x - 112\cos^5 x + 56\cos^3 x - 7\cos x$$

A fenti képletsor közvetlenül ugyan nem tartozik az előadás témájához, viszont segédeszközül szolgál a 4. típusú összegképletek kezeléséhez. Ha ugyanis a $\cos kx$ kifejezés polinom előállítását egy bizonyos k-ig bezárólag megadtuk, akkor ezek segítségével a $\cos^k x$ hatványokat is fel tudjuk írni különböző argumentumú koszinusz függvények lineáris kombinációjaként. Nevezetesen

$$\cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\cos^3 x = \tfrac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$$

$$\cos^4 x = \tfrac{1}{8}(3 + 4\cos 2x + \cos 4x)$$

$$\cos^5 x = \tfrac{1}{16}(10\cos x + 5\cos 3x + \cos 5x)$$

$$\cos^6 x = \tfrac{1}{32}(10 + 15\cos 2x + 6\cos 4x + \cos 6x)$$

$$\cos^7 x = \tfrac{1}{64}(35\cos x + 21\cos 3x + 7\cos 5x + \cos 7x)$$

Az utóbbi képletsor viszont hídat képez a 3. és 4. típusú összegzési formulák között. Ilyen képletek segítségével a 4. típusú összegzéseket vissza tudjuk vezetni a 3. típusra.

Ezen bevezetés után vegyük sorra az előadás témájaként felsorolt típusokat.

2. Hatványösszegek képletei

A kitűzött cél: Állítsuk elő a

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$$

alakú összegeket zárt alakban. A $k \leq 7$-re vonatkozó konkrét esetekről már szó volt, az alábbiakban újra felsoroljuk ezen speciális esetek összegképletét:

$$\begin{aligned}
1+2+3+\ldots+n &= \tfrac{n(n+1)}{2} \\
1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 &= \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 &= \tfrac{n^2(n+1)^2}{4} \\
1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4 &= \tfrac{n(n+1)(2n+1)[3n(n+1)-1]}{30} \\
1^5+2^5+3^5+\ldots+n^5 &= \tfrac{n^2(n+1)^2[2n(n+1)-1]}{12} \\
1^6+2^6+3^6+\ldots+n^6 &= \tfrac{n(n+1)(2n+1)[3n^2(n+1)^2-3n(n+1)+1]}{42} \\
1^7+2^7+3^7+\ldots+n^7 &= \tfrac{n^2(n+1)^2[3n^2(n+1)^2-4n(n+1)+2]}{24}
\end{aligned}$$

Létezik egy szép általános képlet is, amelyről diákként még nem tudtam, csak jóval idősebb korban találtam meg a szakirodalomban:

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{n^k}{2} + \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} \frac{1}{2j} \binom{k}{2j-1} B_{2j} n^{k-2j+1},$$

ahol $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$ a Bernoulli számok.

(A Bernoulli számok definíciója és további elemei könyvekben és internetes portálok táblázataiban megtalálhatók.)

Nem tartozik szorosan a témához, mégis érdemes itt megemlíteni, hogy negatív kitevőjű véges hatványösszegek esetén zárt formulát nem ismerünk, ezzel szemben a végtelen összegekre léteznek klasszikus eredmények:

$a_n = \frac{1}{n}$ esetén a harmonikus sort kapjuk, amelyre a végtelen összeg divergens. (Aszimptotikusan a $\log x$ függvény görbéjéhez illeszkedik.)

(-1)-nél kisebb egész kitevőkre a végtelen összeg konvergens; zárt képletet páros negatív kitevőkre ismerünk, például

$$1 + \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{3^2} + \ldots = \tfrac{\pi^2}{6}$$

$$1 + \tfrac{1}{2^4} + \tfrac{1}{3^4} + \ldots = \tfrac{\pi^4}{90}$$

$$1 + \tfrac{1}{2^6} + \tfrac{1}{3^6} + \ldots = \tfrac{\pi^6}{945}$$

3. Hatványozott számtani sorozatok összegképletének meghatározása

Ebben a szakaszban azokkal a sorozatokkal foglalkozunk, melyeknél a sorozat általános tagja $a_n = [a + d(n-1)]^k$.

A megoldás tetszőleges k esetén visszavezethető az előző szakaszban megfogalmazott típusra, például

$k = 1$ esetén (közönséges számtani sorozat)

$$\sum_{i=1}^{n}[a + d(i-1)] = na + d[1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)] = na + d \cdot \frac{n(n-1)}{2},$$

$k = 2$ esetén

$$\sum_{i=1}^{n}[a+d(i-1)]^2 = na^2 + 2ad[1+2+3+\ldots+(n-1)] + d^2[1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2] =$$

$$= na^2 + 2ad \cdot \frac{n(n-1)}{2} + d^2 \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6},$$

$k = 3$ esetén

$$\sum_{i=1}^{n}[a+d(i-1)]^3 = na^3 + 3a^2d[1+2+3+\ldots+(n-1)] + 3ad^2[1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2] +$$

$$+d^3[1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3] =$$

$$= na^3 + 3a^2d \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 3ad^2 \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + d^3 \cdot \frac{n^2(n-1)^2}{4}.$$

Az általános esetben tetszőleges k kitevőre

$$\sum_{i=1}^{n}[a + (i-1)d]^k = a^k + \sum_{i=2}^{n}\left[a^k + \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}a^{k-j}(i-1)^j d^j\right] =$$

$$= na^k + \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}a^{k-j}d^j\sum_{i=2}^{n}(i-1)^j = na^k + \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}a^{k-j}d^j\sum_{i=1}^{n-1}i^j.$$

4. Koszinusz függvénnyel leképezett számtani sorozatok

Tekintsük az olyan sorozatokat, melyek általános tagja $a_n = \cos[a + d(n-1)]$.

Az összegképlet:

$$\sum_{i=1}^{n} \cos[a + (i-1)d] = \begin{cases} \frac{\sin\left[a+\left(n-\frac{1}{2}\right)d\right] - \sin\left[a-\frac{1}{2}d\right]}{2\sin\frac{d}{2}}, \text{ ha } d \not\equiv 0 \pmod{2\pi} \\ \\ n\cos a, \text{ ha } d \equiv 0 \pmod{2\pi} \end{cases} \tag{1}$$

Külön figyelmet érdekel az a speciális eset, amikor $d = \frac{2\pi}{n}e$, ahol e egy 0 és n közötti egész. Az előbbi képletet erre a speciális esetre alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \cos[a + (i-1)\frac{2\pi}{n}e] = 0 \text{ ha } 0 < e < n. \tag{2}$$

5. Koszinusz függvénnyel leképezett hatványozott számtani sorozatok

Az előző szakaszban tárgyalt sorozat általános elemét k-adik hatványra emeljük: $a_n = \cos^k[a+d(n-1)]$. A $k = 1$ kitevőre vonatkozó eredmény birtokában erre az általánosabb problémára is tudunk megoldást találni. Láttuk, hogy

$$\cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\cos^3 x = \tfrac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$$

$$\cos^4 x = \tfrac{1}{8}(3 + 4\cos 2x + \cos 4x)$$

$$\cos^5 x = \tfrac{1}{16}(10\cos x + 5\cos 3x + \cos 5x)$$

$$\cos^6 x = \tfrac{1}{32}(10 + 15\cos 2x + 6\cos 4x + \cos 6x)$$

$$\cos^7 x = \tfrac{1}{64}(35\cos x + 21\cos 3x + 7\cos 5x + \cos 7x)$$

Az általános esetre – külön páros és külön páratlan kitevőkre – az alábbi képletek bizonyíthatók:

$$\cos^{2r} x = \frac{1}{2^{2r-1}} \left[\binom{2r-1}{r-1} + \sum_{j=1}^{r} \binom{2r}{r-j} \cos 2jx \right], \tag{3}$$

$$\cos^{2r+1} x = \frac{1}{2^{2r}} \sum_{j=0}^{r} \binom{2r+1}{r-j} \cos(2j+1)x. \tag{4}$$

A fenti összefüggések alapján például

$$\sum_{i=1}^{n}\cos^2[a+(i-1)d]=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\cos[2a+(i-1)2d]=$$

$$=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\cdot\begin{cases}\frac{\sin[2a+(2n-1)d]-\sin(2a-d)}{2\sin d}, \text{ ha } d\not\equiv 0 \pmod{\pi}\\ n\cos 2a, \text{ ha } d\equiv 0 \pmod{\pi},\end{cases}\tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\cos^3[a+(i-1)d]=\frac{3}{4}\cdot\sum_{i=1}^{n}\cos[a+(i-1)d]+\frac{1}{4}\cdot\sum_{i=1}^{n}\cos[3a+(i-1)3d]=$$

$$=\begin{cases}\frac{3}{4}\cdot\frac{\sin\left[a+\left(n-\frac{1}{2}\right)d\right]-\sin\left[a-\frac{1}{2}d\right]}{2\sin\frac{d}{2}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\left[3a+\left(n-\frac{1}{2}\right)3d\right]-\sin\left[3a-\frac{1}{2}3d\right]}{2\sin\frac{3d}{2}}, \text{ ha } d\not\equiv 0 \pmod{\frac{2\pi}{3}}\\ \frac{3}{4}\cdot\frac{\sin\left[a+\left(n-\frac{1}{2}\right)d\right]-\sin\left[a-\frac{1}{2}d\right]}{2\sin\frac{d}{2}}+\frac{1}{4}\cdot n\cos 3a, \text{ ha } d\equiv 0 \pmod{\frac{2\pi}{3}}, \text{ de } d\not\equiv 0 \pmod{2\pi}\\ \frac{3}{4}\cdot n\cos a+\frac{1}{4}\cdot n\cos 3a, \text{ ha } d\equiv 0 \pmod{2\pi}\end{cases}$$

A hatványkitevő további növelése során a hasonló módon felírható formulák egyre bonyolultabbá válnak, mivel egyre több különböző modulusra kell egyszerre figyelemmel lenni. Viszonylag könnyebb dolgunk van abban a speciális esetben, amikor $d=\frac{2\pi}{n}$. Ilyenkor a koszinusz függvénnyel leképezett hatványozott számtani sorozat összegképletét általános formulával is meg tudjuk adni, azonban k és n paritásától függően egymástól többé-kevésbé eltérő összegképletek írhatók fel.

Páros $k=2r$ esetén

$$\sum_{i=1}^{n}\cos^{2r}\left[a+(i-1)\frac{2\pi}{n}\right]=\tag{6}$$

$$=\frac{n}{2^{2r-1}}\cdot\binom{2r-1}{r-1}+\begin{cases}\frac{n}{2^{2r-1}}\sum_{h=1}^{\left\lfloor\frac{2r}{n}\right\rfloor}\binom{2r}{r-\frac{n}{2}h}\cos hna \text{ ha } n \text{ páros},\\ \frac{n}{2^{2r-1}}\sum_{h=1}^{\left\lfloor\frac{r}{n}\right\rfloor}\binom{2r}{r-nh}\cos 2hna \text{ ha } n \text{ páratlan}.\end{cases}$$

Páratlan $k=2r+1$ esetén

$$\sum_{i=1}^{n}\cos^{2r+1}\left[a+(i-1)\frac{2\pi}{n}\right]=\begin{cases}0 \text{ ha } n \text{ páros},\\ \frac{n}{2^{2r}}\sum_{h=0}^{\left\lfloor\frac{r-\frac{n-1}{2}}{n}\right\rfloor}\binom{2r+1}{r-\frac{n-1}{2}-nh}\cos(2h+1)na \text{ ha } n \text{ páratlan}.\end{cases}\tag{7}$$

6. Alkalmazások matematikai versenyfeladatok megoldására

A hatványösszegek képleteire nem kerestem az előadásomhoz konkrét alkalmazásokat. Ehelyett csak annyit szeretnék elmondani, hogy diákkori matematikai feladatmegoldói praxisomban gyakran vettem hasznát ezeknek a képleteknek – természetesen csak $k = 1, 2, 3$ kitevővel – különböző algebrai, kombinatorikai és szöveges Kömal és egyéb feladatok megoldására. Mivel az ilyen feladatok a kevésbé nehéz kategóriába tartoznak, azt hiszem inkább az I-II. osztályosok (14-16 évesek) számára kiírt gyakorlatokban fordultak elő.

Szögfüggvényekkel kapcsolatos összegképletek nemzeti és nemzetközi tanulmányi versenyek feladatai között is felbukkantak. Ilyenekre mutatunk néhány példát az alábbiakban.

Nemzetközi Matematikai Diákolimpia 1962/4. feladat. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1.$$

Egy lehetséges megoldás: A koszinusz függvénnyel leképezett hatványozott (négyzetre emelt) számtani sorozat (5) összegképlete szerint

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x =$$

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \begin{cases} \frac{\sin[2x+(6-1)x]-\sin(2x-x)}{2\sin x}, \text{ ha } x \not\equiv 0 \pmod{\pi} \\ 3\cos 2x, \text{ ha } x \equiv 0 \pmod{\pi} \end{cases},$$

A $x \equiv 0 \pmod{\pi}$ eset kizárható, mert ilyenkor az összeg értéke mindig 2. Ezért a kitűzött feladat a következő egyenletre vezet:

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 7x - \sin x}{2\sin x} = 1.$$

Átrendezéssel:

$$0 = \sin 7x + \sin x = 2\sin 4x \cos 3x = 8\sin x \cos x \cos 2x \cos 3x.$$

Ennek megoldása már triviális, csak ne feledkezzünk el az $x \equiv 0 \pmod{\pi}$ hamis gyökök kizárásáról.

Nemzetközi Matematikai Diákolimpia 1963/5. feladat. Bizonyítsuk be, hogy

$$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}.$$

Egy lehetséges megoldás: A $\cos x=-\cos(\pi-x)$ összefüggés alapján a feladatban szereplő kifejezést úgy is írhatjuk, hogy

$$\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}.$$

A koszinusz függvénnyel leképezett számtani sorozat (1) összegképlete szerint

$$\cos x+\cos 3x+\cos 5x=\begin{cases}\frac{\sin\left[x+\left(3-\frac{1}{2}\right)2x\right]-\sin\left[x-\frac{1}{2}2x\right]}{2\sin\frac{2x}{2}}=\frac{\sin 6x}{2\sin x}, \text{ ha } 2x\not\equiv 0 \pmod{2\pi}\\ \\ 3\cos x, \text{ ha } 2x\equiv 0 \pmod{2\pi}\end{cases}.$$

Az $x=\frac{\pi}{7}$ esetre konkrétizálva, innét azt kapjuk, hogy

$$\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{\sin\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{2}.$$

Egy 1997. évi erdélyi matematikai versenyfeladat:

Bizonyítsuk be, hogy

$$\left[\sin^7 x+\sin^7\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin^7\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)\right]^2+ \tag{8}$$
$$+\left[\cos^7 x+\cos^7\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos^7\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)\right]^2=\left[\frac{63}{64}\right]^2.$$

A (7) összegképletet $k=7$ $(r=3)$, $n=3$ esetére alkalmazva

$$\sum_{i=1}^{3}\cos^7\left[x+(i-1)\frac{2\pi}{3}\right]=\frac{3}{2^6}\cdot\sum_{h=0}^{0}\binom{7}{2-3h}\cos(2h+1)3x=\frac{63\cos 3x}{64}.$$

A szinusz hatványösszegeket a $\sin x=\cos(x-\frac{\pi}{2})$ összefüggés alapján koszinusz hatványösszegekké átalakítva

$$\sum_{i=1}^{3}\sin^7\left[x+(i-1)\frac{2\pi}{3}\right]=\sum_{i=1}^{3}\cos^7\left[x-\frac{\pi}{2}+(i-1)\frac{2\pi}{3}\right]=\frac{63\cos 3(x-\frac{\pi}{2})}{64}=-\frac{63\sin 3x}{64}.$$

Ezek alapján már egyszerűen következik a (8) egyenlőség.

A (8) alatti egyenlőség úgy is interpretálható, hogy a bal oldalon álló kifejezés nem változik meg, vagyis tehetetlen marad az x szög tetszőleges változtatása esetén. Ezzel az észrevétellel kapcsolatban azon tűnődtem, hogy egyetlen konkrét esetre vonatkozó tehetetlenségi tulajdonság önmagában nem túl érdekes, de milyen szép lenne, ha be lehetne bizonyítani egy általános tehetetlenségi tételt tetszőleges kitevő és tetszőleges számú tagból álló hasonló esetén. Az erre adott válasz részbeni tárgyalását a következő külön szakaszba tettem.

7. A tehetetlenségi probléma teljeskörű megoldása

Az erre vonatkozóan felvetett kérdés önmagában is elég komplex ahhoz, hogy akár egy önálló külön előadás tárgya lehetne. Ezért most csak röviden és bizonyítás nélkül szeretném ismertetni a válasz lényegét.

Az előző szakaszban felvetett tehetetlenségi probléma megoldásával foglalkozva kiderült, hogy teljes általánosan nem igaz, de igen sok esetben fennáll a tehetetlenségi tulajdonság, vagyis az, hogy a

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \sin^k \left(x + (i-1)\frac{2\pi}{n}\right)\right]^2 + \left[\sum_{i=1}^{n} \cos^k \left(x + (i-1)\frac{2\pi}{n}\right)\right]^2 \tag{9}$$

összeg értéke nem függ x-től a (k, n) párok egy jól meghatározható halmazára.

Ugyanez a probléma geometriai interpretációban is megfogalmazható. Tekintsük a (ξ, η) koordinátarendszerben az origó középpontú egység sugarú körbe írt szabályos sokszögeket. Legyen egy tetszőleges ilyen n-szög ($n \geq 3$, tetszőleges) egyik csúcsának a ξ-tengellyel bezárt szöge x. Ekkor a szabályos n-szög $P_1(\xi_1, \eta_1), P_2(\xi_2, \eta_2), \ldots, P_n(\xi_n, \eta_n)$ csúcsainak koordinátái:

$$\xi_1 = \cos x, \quad \xi_2 = \cos\left(x + \frac{2\pi}{n}\right), \ldots, \xi_n = \cos\left(x + (n-1)\frac{2\pi}{n}\right),$$

$$\eta_1 = \sin x, \quad \eta_2 = \sin\left(x + \frac{2\pi}{n}\right), \ldots, \eta_n = \sin\left(x + (n-1)\frac{2\pi}{n}\right),$$

tehát a vizsgált tehetetlenségi probléma a szabályos sokszögek csúcsainak koordinátáival kifejezve úgy hangzik, hogy a

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i^k\right]^2 + \left[\sum_{i=1}^{n} \eta_i^k\right]^2$$

négyzetösszeg mely (k, n) párok esetén független és mely (k, n) párok esetén nem független az egységkörbe írt szabályos n-szög helyzetétől.

A válasz lényegét a következő két táblázat tartalmazza:

A (9) kifejezés értéke x-től független az alábbi esetekben:

$k \backslash n$	páratlan	páros
páratlan	$k < 3n$	mindig
páros	$k < 2n$	$k < n$

Ezzel szemben a (9) kifejezés értéke x-től függő minden más esetben, vagyis az alábbi esetekben:

$k \backslash n$	páratlan	páros
páratlan	$k \geq 3n$	soha
páros	$k \geq 2n$	$k \geq n$

8. Bizonyítás vázlatok

Valamennyi itt következő bizonyítás elemi. Általános képletek bizonyítása helyett inkább speciális esetek bizonyításra törekszem a jobban követhetőség érdekében.

A hatványösszegek képleteinek bizonyítása kissé eltér páratlan, illetve páros esetben.

Páratlan $k = 2r + 1$ esetén az

$$\frac{1}{2} \cdot [(n+1)n]^{r+1} - \frac{1}{2} \cdot [n(n-1)]^{r+1} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \binom{r+1}{r-2i} n^{2r-2i+1}$$

azonosságból indulunk ki, amit úgy kapunk, hogy a bal oldal tagjaira a binomiális tételt alkalmazzuk. (Összevonás után minden második tag kiesik.)

Ezt követően n értékét egyesével csökkentve $r = 0$ és $r = 1$ esetén közvetlenül megkapjuk a kivánt összegképletet, $r \geq 2$ esetén pedig egy rekurzív formulához jutunk.

$k = 1$ ($r = 0$) eset:

$\frac{1}{2} \cdot [(n+1)n] - \frac{1}{2} \cdot [n(n-1)] = n$

$\frac{1}{2} \cdot [n(n-1)] - \frac{1}{2} \cdot [(n-1)(n-2)] = n-1$

$\ldots$

$\frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 1 = 2$

$\frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 0 = 1$

A felsorolt egyenlőségeket összeadva azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2} \cdot [(n+1)n] = 1 + 2 + \ldots + n$$

$k = 3$ ($r = 1$) eset:

$\frac{1}{2} \cdot [(n+1)n]^2 - \frac{1}{2} \cdot [n(n-1)]^2 = 2n^3$

$\frac{1}{2} \cdot [n(n-1)]^2 - \frac{1}{2} \cdot [(n-1)(n-2)]^2 = 2(n-1)^3$

$\ldots$

$\frac{1}{2} \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 = 2 \cdot 2^3$

$\frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 = 2 \cdot 1^3$

A felsorolt egyenlőségeket összeadva azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2} \cdot [(n+1)n]^2 = 2 \cdot \left(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3\right)$$

$k = 5$ $(r = 2)$ **eset:**

$$\tfrac{1}{2} \cdot [(n+1)n]^3 - \tfrac{1}{2} \cdot [n(n-1)]^3 = 3n^5 + n^3$$

$$\tfrac{1}{2} \cdot [n(n-1)]^3 - \tfrac{1}{2} \cdot [(n-1)(n-2)]^3 = 3(n-1)^5 + (n-1)^3$$

$$\ldots$$

$$\tfrac{1}{2} \cdot 2^3 - \tfrac{1}{2} \cdot 1^3 = 3 \cdot 2^5 + 2^3$$

$$\tfrac{1}{2} \cdot 1^3 - \tfrac{1}{2} \cdot 0^3 = 3 \cdot 1^5 + 1^3$$

A felsorolt egyenlőségeket összeadva most azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2} \cdot [(n+1)n]^3 = 3 \cdot \left(1^5 + 2^5 + \ldots + n^5\right) + \left(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3\right)$$

Ezután a jobb oldali második összeg már ismert zárt képletének behelyettesítésével és az egyenlőség átrendezésével célhoz érünk.

$k = 7$ $(r = 3)$ **eset:**

$$\tfrac{1}{2} \cdot [(n+1)n]^4 - \tfrac{1}{2} \cdot [n(n-1)]^4 = 4n^7 + 4n^5$$

$$\tfrac{1}{2} \cdot [n(n-1)]^4 - \tfrac{1}{2} \cdot [(n-1)(n-2)]^3 = 4(n-1)^7 + 4(n-1)^5$$

$$\ldots$$

$$\tfrac{1}{2} \cdot 2^4 - \tfrac{1}{2} \cdot 1^4 = 4 \cdot 2^5 + 4 \cdot 2^5$$

$$\tfrac{1}{2} \cdot 1^4 - \tfrac{1}{2} \cdot 0^4 = 4 \cdot 1^5 + 4 \cdot 1^5$$

A felsorolt egyenlőségeket összeadva most azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2} \cdot [(n+1)n]^4 = 4 \cdot \left(1^7 + 2^7 + \ldots + n^7\right) + 4 \cdot \left(1^5 + 2^5 + \ldots + n^5\right)$$

Ezután az előző esettel hasonló módon fejezzük be a számítást, a hetedik hatványok összegének zárt formulával történő előállítását.

Páros $k = 2r$ **esetén** a páratlan esetnél kicsit bonyolultabb a számítás, mivel a

$$(2n+1) \cdot \frac{1}{2} \cdot [(n+1)n]^r - (2n-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot [n(n-1)]^r = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} c_i \cdot n^{2r-2i}$$

egyenlőségből indulunk ki. (A c_i értékeket a konkrét esetekre vonatkozó számítások során pontosítani fogjuk.)

$k = 2$ $(r = 1)$ **eset:**

$$(2n+1) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot [(n+1)n] - (2n-1) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot [n(n-1)] = 3n^2$$

$$(2n-1) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot [n(n-1)] - (2n-3) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot [(n-1)(n-2)] = 3(n-1)^2$$

$$\ldots$$

$$5 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 2 - 3 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1 = 3 \cdot 2^2$$

$$3 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1 - 1 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 0 = 3 \cdot 1^2$$

A felsorolt egyenlőségeket összeadva azt kapjuk, hogy

$$(2n+1) \cdot \frac{1}{2} \cdot [(n+1)n] = 3 \cdot \left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right)$$

$k = 4$ $(r = 2)$ **eset:**

$$(2n+1) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot [(n+1)n]^2 - (2n-1) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot [n(n-1)]^2 = 5n^4 + n^2$$

$$(2n-1) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot [n(n-1)]^2 - (2n-3) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot [(n-1)(n-2)]^2 = 5(n-1)^4 + (n-1)^2$$

$$\ldots$$

$$5 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 2^2 - 3 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1^2 = 5 \cdot 2^4 + 2^2$$

$$3 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1^2 - 1 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 0^2 = 5 \cdot 1^4 + 1^2$$

A felsorolt egyenlőségeket összeadva most azt kapjuk, hogy

$$(2n+1) \cdot \frac{1}{2} \cdot [(n+1)n]^2 = 5 \cdot \left(1^4 + 2^4 + \ldots + n^4\right) + \left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right)$$

Ezután a jobb oldali második összeg már ismert zárt képletének behelyettesítésével és az egyenlőség átrendezésével célhoz érünk.

$k = 6$ $(r = 3)$ **eset:**

$(2n+1) \cdot \frac{1}{2} \cdot [(n+1)n]^3 - (2n-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot [n(n-1)]^3 = 7n^6 + 5n^4$

$(2n-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot [n(n-1)]^3 - (2n-3) \cdot \frac{1}{2} \cdot [(n-1)(n-2)]^3 = 7(n-1)^6 + 5(n-1)^4$

$\ldots$

$5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^3 - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^3 = 7 \cdot 2^6 + 5 \cdot 2^4$

$3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^3 - 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0^3 = 7 \cdot 1^6 + 5 \cdot 1^4$

A felsorolt egyenlőségeket összeadva most azt kapjuk, hogy

$$(2n+1) \cdot \frac{1}{2} \cdot [(n+1)n]^3 = 7 \cdot \left(1^6 + 2^6 + \ldots + n^6\right) + 5 \cdot \left(1^4 + 2^4 + \ldots + n^4\right)$$

Ettől fogva a befejezés a korábbiakhoz hasonló.

A koszinusz függvénnyel leképezett számtani sorozatok (1) összegképlete az iskolai táblázatokból jól ismert egyik képlet alkalmazásaként származó

$$\sin\left[a+\left(i-\frac{1}{2}\right)d\right]-\sin\left[a+\left(i-\frac{3}{2}\right)d\right]=2\cos[a+(i-1)d]\sin\frac{d}{2}$$

egyenlőségek $i=1$-től n-ig történő összegzésével adódik. (A $d\equiv 0 \pmod{2\pi}$ esetre vonatkozó egyenlőség evidens.)

A $d=\frac{2\pi}{n}e$ $(0<e<n)$ speciális esetben az 1) képlet első sora érvényes, ahol a számlálóban lévő két szinusz függvény argumentuma 2π egész számú többszörösével tér el egymástól, és így a számláló két tagja kiejti egymást.

A koszinusz függvénnyel leképezett hatványozott számtani sorozatok összegképletéhez először is a koszinusz függvények hatványaira kell képleteket találni. Bebizonyítható (a már korábban (3)-(4) sorszámmal is felírt) alábbi általános formula:

$$\cos^{2r}x=\frac{1}{2^{2r-1}}\left[\binom{2r-1}{r-1}+\sum_{j=1}^{r}\binom{2r}{r-j}\cos 2jx\right],$$

$$\cos^{2r+1}x=\frac{1}{2^{2r}}\sum_{j=0}^{r}\binom{2r+1}{r-j}\cos(2j+1)x.$$

A bizonyítást elhagyjuk, bár nem túlságosan nehéz, de hosszadalmas iparos munkát igényel az általános bizonyítás véghezvitele. Ezekből a képletekből $x=a+(i-1)d$ helyettesítéssel és i-re történő összegzéssel adódik, hogy

$$\sum_{i=1}^{n}\cos^{2r}[a+(i-1)d]=\frac{n}{2^{2r-1}}\binom{2r-1}{r-1}+\frac{1}{2^{2r-1}}\sum_{j=1}^{r}\binom{2r}{r-j}\sum_{i=1}^{n}\cos[2ja+(i-1)2jd]$$

és

$$\sum_{i=1}^{n}\cos^{2r+1}[a+(i-1)d]=\frac{1}{2^{2r}}\sum_{j=0}^{r}\binom{2r+1}{r-j}\sum_{i=1}^{n}\cos[(2j+1)a+(i-1)(2j+1)d].$$

Itt a kettős szummázásoktól megszabadulhatunk, ha a belső, i szerinti összegzésekre alkalmazzuk a koszinusz függvénnyel leképezett számtani sorozat(1) összegképletét. Ha ezt megtettük, akkor végül a vizsgált érdekes speciális esetre, a $d=\frac{2\pi}{n}$ esetre felírt (6)-(7) képletek levezetése csak technika kérdése.